확률이 a인 시행을 1회 성공할 때 까지 반복 후에,
확률이 b인 시행을 1회 성공할 때 까지 반복 했을 때, 총 시행 횟수를 n 이라고 하자.

이때, n번째 시행을 했을 때, 확률이 b인 시행을 성공할 확률을 구해보면

$$P(X=2)=ab$$
$$P(X=3)=ab\left[(1-a)+(1-b)\right]$$
$$P(X=4)=ab\left[(1-a)^2+(1-a)(1-b)+(1-b)^2\right]$$
$$P(X=5)=ab\left[(1-a)^3+(1-a)^2(1-b)+(1-a)(1-b)^2+(1-b)^3\right]$$
$$\vdots$$
$$P(X=n)=ab\sum_{i=0}^{n-2}\left[(1-a)^{n-2-i}(1-b)^i\right]$$

로 구할 수 있다.

이때, $a\neq b$라면, $\sum_{i=0}^{n}x^{n-i}y^i=\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}$이므로,

$P(X=n)=\frac{ab}{b-a}\left[(1-a)^{n-1}-(1-b)^{n-1}\right]$이다.

적률 생성 함수 $\phi(t)$를 구해보면

$$\phi(t)=\sum_{x=2}^{\infty}e^{tx}\left[(1-a)^{x-1}-(1-b)^{x-1}\right]=\frac{ab}{b-a}\sum_{x=2}^{\infty}e^{tx}\left[(1-a)^{x-1}-(1-b)^{x-1}\right]$$
$$=\frac{ab}{b-a}\sum_{x=1}^{\infty}e^{tx}\left[(1-a)^{x-1}-(1-b)^{x-1}\right]=\frac{ab}{b-a}\left[\sum_{x=1}^{\infty}e^{tx}(1-a)^{x-1}-\sum_{x=1}^{\infty}e^{tx}(1-b)^{x-1}\right]$$

$$=\frac{ab}{b-a}\left[\sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{tx}(1-a)^x}{1-a}-\sum_{x=1}^{\infty}\frac{e^{tx}(1-b)}{1-b}\right]=\frac{ab}{b-a}\left[\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\left(e^t(1-a)\right)^x}{1-a}-\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\left(e^t(1-b)\right)^x}{1-b}\right]$$
$$=\frac{ab}{b-a}\left[\frac{e^t}{1-e^t(1-a)}-\frac{e^t}{1-e^t(1-b)}\right]=\frac{ab}{b-a}\left[\phi_a(t)-\phi_b(t)\right]$$

$\phi_a(t)=\frac{e^t}{1-e^t(1-a)}$, $\phi_b(t)=\frac{e^t}{1-e^t(1-b)}$라 할 수 있다.

평균과 분산은 각각 $E(X)=\phi'(0)$, $Var(X)=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2=\phi''(0)-\left[\phi'(0)\right]^2$이므로,
먼저 적률함수를 미분하여 형태를 구해보면,

$$\phi'(t)=\frac{ab}{b-a}\left[\phi_a'(t)-\phi_b'(t)\right],\ \phi''(t)=\frac{ab}{b-a}\left[\phi_a''(t)-\phi_b''(t)\right]$$

$$\phi_a'(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{e^t}{1-e^t(1-a)}\right]=\frac{e^t\left(1-e^t(1-a)\right)-e^t\left(-e^t(1-a)\right)}{\left(1-e^t(1-a)\right)^2}=\frac{e^t}{\left(1-e^t(1-a)\right)^2}$$

$$\phi_a''(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{e^t}{\left(1-e^t(1-a)\right)^2}\right]=\frac{e^t\left(1-e^t(1-a)\right)-e^t\left(-2e^t(1-a)\right)}{\left(1-e^t(1-a)\right)^3}=\frac{e^t+e^{2t}(1-a)}{\left(1-e^t(1-a)\right)^3}$$

로 계산이 된다.

따라서 값을 구해보면

$$E(X)=\frac{ab}{b-a}\left[\phi_a{}'(0)-\phi_b{}'(0)\right]=\frac{ab}{b-a}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=\frac{ab}{b-a}\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\frac{b+a}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

$$E(X^2)=\frac{ab}{b-a}\left[\phi_a{}''(0)-\phi_b{}''(0)\right]=\frac{ab}{b-a}\left(\frac{2-a}{a^3}-\frac{2-b}{b^3}\right)=\frac{ab}{b-a}\frac{2(b^3-a^3)-ab(b^2-a^2)}{a^3b^3}$$

$$\therefore E(X^2)\equiv\frac{2}{a^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{b^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

$$\therefore Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b},\ Std(X)=\sqrt{Var(X)}$$

$$P(X\le n)=\sum_{i=2}^{n}\frac{ab}{b-a}\left[(1-a)^{i-1}-(1-b)^{i-1}\right]=\frac{ab}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\left[(1-a)^{i-1}-(1-b)^{i-1}\right]$$

$$=\frac{ab}{b-a}\left(\frac{1-(1-a)^n}{a}-\frac{1-(1-b)^n}{b}\right)=1-\frac{b(1-a)^n-a(1-b)^n}{b-a}$$ 에서

$\mu=E(X)$, $\sigma=Std(X)$라 하자. (평균과 표준편차)
$P(X=i)$의 그래프는 음 이항 분포를 따지고, 이는 기하분포의 확장형이므로,
확률 a와 b가 충분히 작은 값을 가지고 시행한 횟수 I가 충분히 크다는 전제 하에서는,
$P(X=i)$를 기하분포의 꼴로 근사할 수 있다.

평균이 μ, 표준편차가 σ인 기하분포에서 누적확률분포는 $P(X<n)=1-\exp\left[-\left(1+\frac{n-\mu}{\sigma}\right)\right]$

이므로, $P(X\le n)=1-\frac{b(1-a)^n-a(1-b)^n}{b-a}$를 위의 식을 통해 근사한다면,

$P(X>\mu)\simeq e^{-1}$, $P(X>\mu+\sigma)\simeq e^{-2}$, $P(X>\mu+2\sigma)\simeq e^{-3}$, $P(X>\mu+3\sigma)\simeq e^{-4}$
로 볼 수 있다.

또는, $P(X\le n)=1-\frac{b(1-a)^n-a(1-b)^n}{b-a}=1-e^{-t}$라고 하면,

$b(1-a)^n-a(1-b)^n=(b-a)e^{-t}$에서 $a(1-b)^n\left[1-\frac{b}{a}\left(\frac{1-a}{1-b}\right)^n\right]=(a-b)e^{-t}$임을 알 수 있고,

$n\approx E(X)\gg 1$이므로, $a>b$일 때의 경우 $\frac{b}{a}\left(\frac{1-a}{1-b}\right)^n\approx 0$가 된다.

따라서 $a(1-b)^n\approx(a-b)e^{-t}$이고, $n\approx\frac{\ln(1-b/a)-t}{\ln(1-b)}\approx\frac{\ln(1-b/a)-t}{1-b}$이다.

따라서, $\mu\approx\frac{\ln(1-b/a)-t}{\ln(1-b)}$, $\sigma\approx\frac{1}{\ln(1-b)}$이다.

$P(X=n)=\dfrac{ab}{b-a}\left[(1-a)^{n-1}-(1-b)^{n-1}\right]$의 최댓값을 구해보자. (최빈값으로 볼 수 있다.)

먼저 $P(X=n)$을 미분해보면,

$$P'(n)=\frac{d}{dn}(P(X=n))=\frac{d}{dn}\left(\frac{ab}{b-a}\left[(1-a)^{n-1}-(1-b)^{n-1}\right]\right)$$

$=\dfrac{ab}{b-a}\left[(1-a)^{(n-1)}\ln(1-a)-(1-b)^{(n-1)}\ln(1-b)\right]$이다.

$P'(n)=0$이 되기 위해서는 $(1-a)^{n-1}\ln(1-a)=(1-b)^{n-1}\ln(1-b)$이여야 하고,

이를 풀어보면, $\left(\dfrac{1-a}{1-b}\right)^{n-1}=\dfrac{\ln(1-b)}{\ln(1-a)}\rightarrow n=1+\dfrac{\ln\left(\dfrac{\ln(1-b)}{\ln(1-a)}\right)}{\ln\left(\dfrac{1-a}{1-b}\right)}$가 된다.

이때, a와 b가 충분히 작은 수라면, $\ln(1+x)\approx x$이므로,

$n=1+\dfrac{\ln\left(\dfrac{\ln(1-b)}{\ln(1-a)}\right)}{\ln\left(\dfrac{1-a}{1-b}\right)}\approx 1+\dfrac{\ln\left(\dfrac{-b}{-a}\right)}{\ln\left(1-\dfrac{a-b}{1-b}\right)}\approx 1-\dfrac{(1-b)}{(a-b)}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$가 된다.

따라서, n값이 위와 같은 값을 가질 때, $P(X=n)$의 값이 최대가 된다.